



Das Ding mit der Normalverteilung

von Daniela Keller

Normalverteilung ist eine Eigenschaft der Daten, die für viele schließende Methoden (Signifikanztests) in der Statistik Voraussetzung ist. Es herrscht meiner Erfahrung nach bei Anwenderinnen und Anwendern große Unsicherheit bei diesem Thema. Das hat mehrere Gründe:

Oft ist nicht klar, was genau diese Voraussetzung meint: Sollen alle Messwerte normalverteilt sein? Insgesamt oder pro Gruppe? Und was war das mit den Residuen?

Außerdem gibt es unterschiedliche Möglichkeiten die Normalverteilung zu prüfen und diese verschiedenen Methoden können widersprüchliche Ergebnisse bringen. Das führt zu folgenden Fragen:

Wie soll ich denn nun die Normalverteilung prüfen?

Welche Prüfung ist verlässlich?

Hängt das vielleicht von anderen Faktoren wie z.B. der Stichprobengröße ab?

Und was mache ich, wenn sich verschiedene Untersuchungen widersprechen? Wie gehe ich da weiter vor?

Zudem sind manche dieser Prüfungsmethoden ganz offensichtlich subjektiv. Das heißt, die Entscheidung über die Normalverteilung wird nicht an harten Kriterien getroffen, sondern kann von Mal zu Mal, von Anwenderin zu Anwender unterschiedlich ausfallen. Damit haben viele Anwender zurecht Probleme, wo doch die Statistik was mit Mathe zu tun hat und daher doch absolut und objektiv sein sollte, oder?

Dazu kommt noch, dass man vielleicht gelesen oder gehört hat, dass das alles mit der Normalverteilung gar nicht so streng ist und man bei einer größeren Stichprobe sowieso auf die Prüfung verzichten kann. Nun gut. Und was ist dann eine größere Stichprobe?

Sie sehen, das Thema wirft eine Menge Fragen auf. Einige davon möchte ich in diesem Artikel klären.

Was bedeutet überhaupt normalverteilt?

Zunächst einmal betrifft die Frage nach der Normalverteilung nur metrische Daten. Das heißt, wenn Sie sich mit ordinalen oder nominalen Daten beschäftigen, spielt Normalverteilung überhaupt keine Rolle.

Metrische Messwerte sind dann normalverteilt, wenn ihre Verteilung einer Glockenkurve wie in Abbildung 1 entspricht.

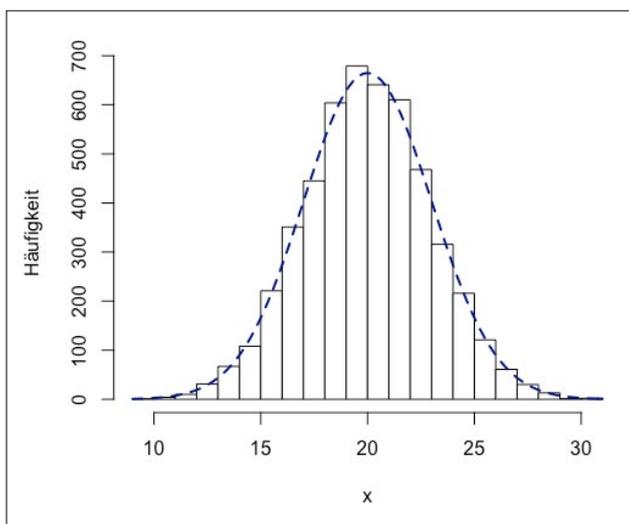


Abbildung 1: Histogramm mit Normalverteilungsanpassung

Abweichungen von der Normalverteilung lassen sich mit Kennwerten wie Schiefe und Exzess (Wölbung) beschreiben. Sind Schiefe und Exzess gleich Null, so liegt perfekte Normalverteilung vor. Daten mit positiver Schiefe sind rechtsschief, mit negativer Schiefe linksschief, vergleiche Abbildungen 2 und 3. Ein positiver Exzess weist auf eine im Vergleich zur Normalverteilung spitze Verteilung hin, ein negativer Exzess dagegen beschreibt eine flache Verteilung, vergleiche Abbildungen 4 und 5.

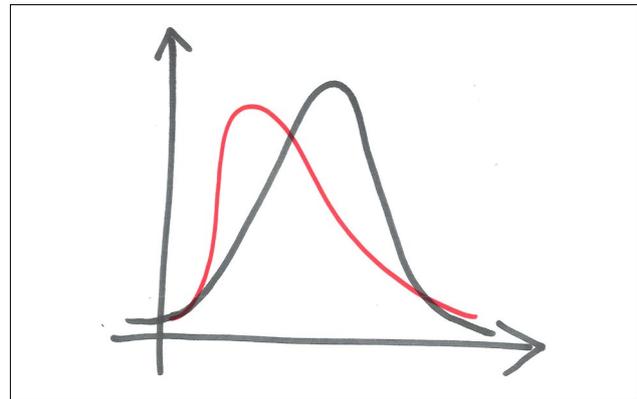


Abbildung 2: Rechtsschiefe Verteilung mit positiver Schiefe (rot).

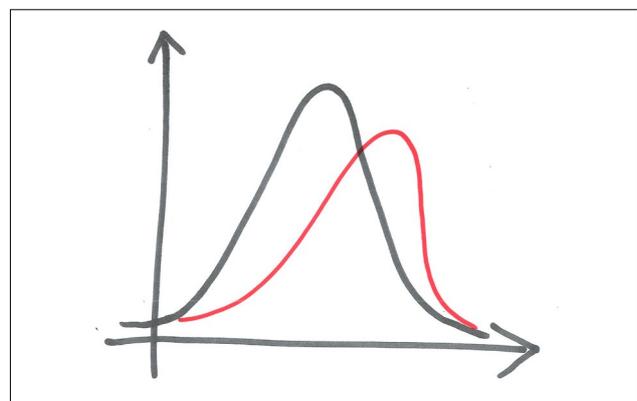


Abbildung 3: Linksschiefe Verteilung mit negativer Schiefe (rot).

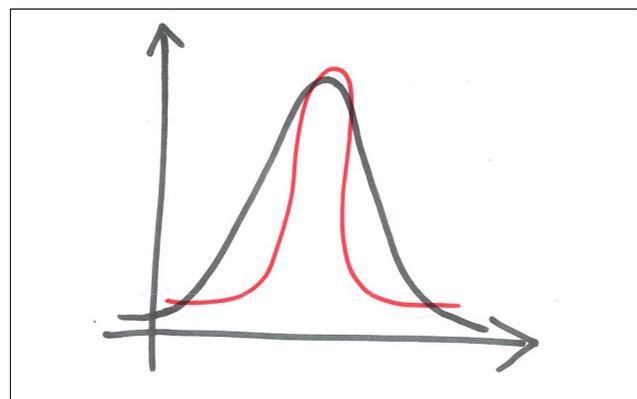


Abbildung 4: Spitze Verteilung mit positivem Exzess (rot).

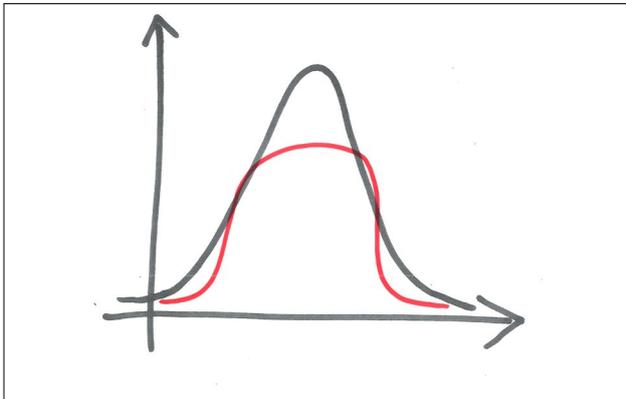


Abbildung 5: Flache Verteilung mit negativem Exzess.

Wie prüft man Normalverteilung?

Die bereits genannten Kennwerte Schiefe und Exzess können zur Einschätzung, ob eine Normalverteilung vorliegt, herangezogen werden. Weichen sie von null ab, so liegt keine perfekte Normalverteilung vor und Sie können anhand der Abweichung (siehe oben) erkennen, wie verteilt die Daten stattdessen sind, beispielsweise rechtschief mit spitzer Verteilung, wenn sowohl Schiefe als auch Exzess positiv sind.

Auch mit Signifikanztests lässt sich prüfen, ob die Daten normalverteilt sind. Zwei bekannte Vertreter dieser Tests sind der Kolmogorov-Smirnoff- und der Shapiro-Wilk-Test. Sie untersuchen die Nullhypothese „Die Daten sind normalverteilt“ auf Signifikanz. Kommen sie zu einem signifikanten Ergebnis, so wird die Nullhypothese abgelehnt und somit nachgewiesen, dass keine Normalverteilung besteht. Dagegen geht man bei einem nicht signifikanten Ergebnis davon aus, dass Normalverteilung vorliegt, weil in diesem Fall die Nullhypothese, dass die Daten normalverteilt sind, nicht abgelehnt werden kann.

Das Problem dabei: Diese Tests haben wie alle Signifikanztests die Eigenschaft, dass ihre Teststärke (Power) mit steigender Stichprobengröße wächst. Das bedeutet, dass bei einer großen Stichprobe (sagen wir $N = 200$) die Tests bereits bei nur geringen Abweichungen von der Normalverteilung signifikant werden und damit die Normalverteilung ablehnen. Dagegen haben sie bei kleinen Stichproben (sagen wir $N = 10$) nur eine geringe Teststärke und können selbst größere Abweichungen von der Normalverteilung nicht als signifikant nachweisen.

Das führt dazu, dass die Tests auf Normalverteilung im Allgemeinen bei großen Stichproben zu streng und bei kleinen Stichproben zu liberal sind (Field, 2013).

Mein Lieblingstool zur Prüfung auf Normalverteilung ist das Q-Q-Diagramm, auch Normalverteilungsdiagramm oder Quantil-Plot genannt. Hier betrachten Sie eine Grafik, in der die Quantile Ihrer Daten gegen die Quantile der Normalverteilung angetragen werden. Folgen die Punkte in der Grafik der eingezeichneten Geraden, so liegt Normalverteilung vor, wie beispielsweise in Abbildung 6. Weichen die Punkte extrem ab (Abbildung 7) oder zeigt sich ein deutlicher Bogen (Abbildung 8), so sind die Messwerte nicht normalverteilt.

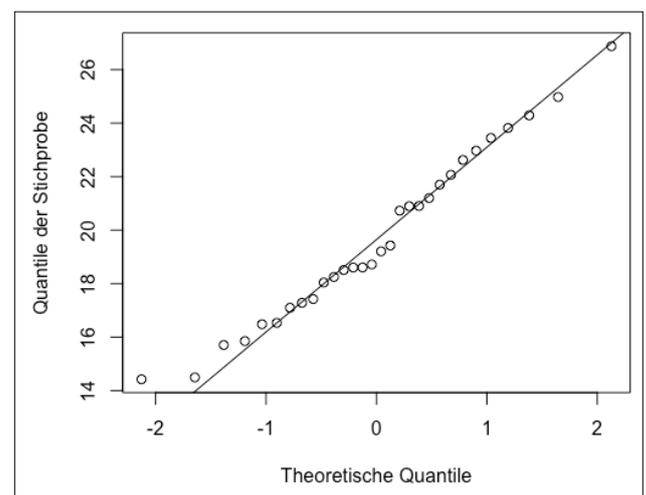


Abbildung 6: Q-Q-Diagramm annähernd normalverteilter Daten.

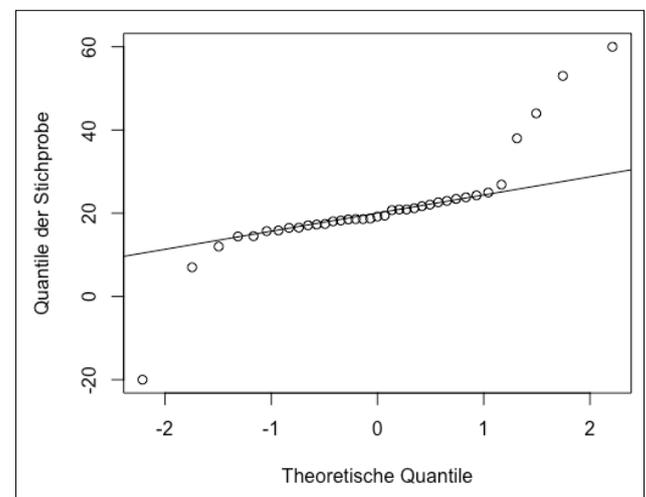


Abbildung 7: Q-Q-Diagramm nicht-normalverteilter Daten aufgrund von Ausreißern.

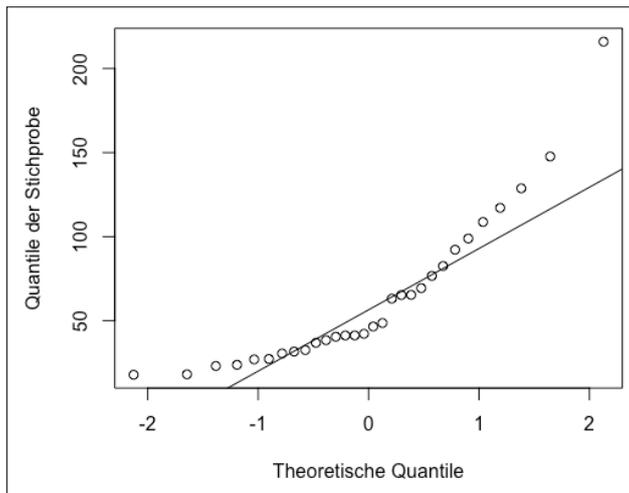


Abbildung 8: Q-Q-Diagramm nicht normalverteilter, schiefer Daten.

Ich weiß, dass die Einschätzung solcher Grafiken zu Beginn sehr schwierig erscheint. Und ich weiß auch, dass die Entscheidung über die Normalverteilung mit solch einer Grafik zum Teil subjektiv ist. Dennoch finde ich es die beste Methode, um Normalverteilung zu prüfen. Wenn Sie mittels Q-Q-Diagrammen die Normalverteilung untersuchen, hängt Ihre Entscheidung nicht von der Stichprobengröße ab. Außerdem sehen Sie, falls es Abweichungen von der Normalverteilung gibt, woran diese liegen. Beispielsweise an Ausreißern wie in Abbildung 7, oder an einer generellen Schiefe der Daten wie in Abbildung 8. Kennen Sie den Grund für die Nicht-Normalverteilung, so können Sie ihn unter Umständen beheben. Dazu später mehr.

Und zum Schluss bemerken Sie außerdem, wie extrem die Abweichungen sind und können dann – zusammen mit dem Wissen, welche weiteren Methoden Sie einsetzen möchten – entscheiden, was das beste weitere Vorgehen ist.

Und glauben Sie mir: mit etwas Übung gewinnen Sie an Sicherheit. Wenn Sie regelmäßig mit Q-Q-Diagrammen arbeiten, wird es Ihnen mit der Zeit leichter fallen, Ihre Entscheidung auf Basis dieses Diagramms zu treffen.

Was genau ist denn nun die Voraussetzung, die erfüllt sein muss?

Oft ist dem Anwender oder der Anwenderin gar nicht klar, was denn genau nun normalverteilt sein muss. Wie oben schon erwähnt, sind sowieso nur metrische Messwerte betroffen. Aber es hängt auch noch von der jeweiligen Methode ab, die Sie für Ihre Hypothesenprüfung später verwenden möchten, was genau gefordert ist: teils soll die Variable komplett normalverteilt sein oder innerhalb jeder einzelnen Gruppe oder auch zu jedem Messzeitpunkt. Oder aber die Verteilung der Messwerte selbst ist egal, aber die Residuen des Modells sollen am Ende normalverteilt sei.

Diese Anforderungen hier für jede Methode aufzulisten würde den Rahmen sprengen. Ich möchte Ihnen nur mitgeben: Sehen Sie sich genau an, was für die von Ihnen ausgewählte Methode denn tatsächlich gefordert ist, und prüfen Sie dann diese Voraussetzungen.

Nun wissen Sie also, was Normalverteilung bedeutet und wie Sie sie prüfen können. Falls Ihre Daten einmal nicht normalverteilt sein sollten, ist das in den allermeisten Fällen gar kein Problem. Es steht Ihnen meist eine Auswahl von verschiedenen Vorgehensweisen zur Verfügung, aus denen Sie die für Ihren Fall passende auswählen können. Welche das sind und wie Sie dabei vorgehen, erfahren Sie in meinem Artikel in der nächsten Ausgabe.

Referenz

Field, Andy (2013): *Discovering Statistics Using IBM SPSS Statistics*. 4. Aufl., London: Sage Publications, S. 188.

Die Autorin

Daniela Keller ist leidenschaftliche Statistik-Expertin und berät Studierende und Wissenschaftler*innen zu allen Themen der statistischen Datenanalyse. Während ihres Studiums der Diplom-Mathematik gründete sie mit Kommilitonen eine studentische statistische Beratung und arbeitete anschließend selbständig in diesem Feld. Neben Einzelberatungen und Workshops unterstützt sie Ihre Kund*innen seit 2019 mit der Statistik-Akademie, ihrem Online-Mitgliederbereich für alle, die Statistik verstehen und selbständig anwenden wollen. Ihr Blog (www.statistik-und-beratung.de/blog) und ihr YouTube-Kanal sind Fundgruben für leicht verständlich aufbereitetes Statistikwissen für die Praxis.



© privat